Liceul Tehnologic Nr.1, Sighişoara, judeţul Mureş

FIŞĂ DE LUCRU - Metoda lui Cramer de rezolvare a sistemelor liniare

Cls. a XI-a (Tehnician în activităţi economice)

Profesor Bianca Cioc

Recapitulând următoarele:

Definiţie

Un sistem în care fiecare ecuaţie este de gradul I cu una sau mai multe necunoscute se numeşte sistem de ecuaţii liniare.

Forma generală a unui sistem de m ecuaţii cu n necunoscute $x_1, x_2, ..., x_n$ este:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad m, n \in N$$

Acestui sistem i se pot asocia două matrice:

- matricea A a coeficienţilor sistemului: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$
- matricea $\bar{A}$ extinsă a sistemului, care se obţine adăugând la matricea coeficienţilor sistemului o coloană formată din termenii liberi ai sistemului:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Definiţia 1

Se numeşte soluţie a sistemului de mai sus, o mulţime ordonată de n numere care atribuite respectiv necunoscutelor $x_1, x_2, ..., x_n$, verifică toate cele m ecuaţii.

Definiţia 2

Un sistem se numeşte compatibil dacă are cel puţin o soluţie şi se numeşte incompatibil dacă nu are soluţie. Dacă sistemul admite o singură soluţie, se spune că este compatibil determinat, iar dacă admite mai multe soluţii se numeşte compatibil nedeterminat. Dacă toţi termenii liberi ai sistemului sunt egali cu zero sistemul se numeşte omogen. Două sisteme sunt echivalente dacă au aceleaşi soluţii.

Teoreme

Teorema 1 (Kronecker-Capelli) Un sistem de ecuaţii liniare este compatibil dacă şi numai dacă rangul matricei sistemului, A, este egal cu rangul matricei extinse, $\bar{A}$ (rang A = rang $\bar{A}$)

Teorema 2 Un sistem de ecuaţii liniare este compatibil determinat dacă şi numai dacă rang A = rang $\bar{A}$ = n.

Pentru un sistem liniar de n ecuaţii cu n necunoscute, enunţul dat de Teorema 2 poate fi reformulat astfel: Un sistem de n ecuaţii liniare cu n necunoscute este compatibil determinat dacă şi numai dacă det A ≠ 0.

Metoda lui Cramer de rezolvare a sistemelor liniare

Un sistem liniar de n ecuaţii cu n necunoscute se numeşte sistem Cramer dacă det A ≠ 0, unde A este matricea coeficienţilor sistemului.

Rezultă că orice sistem Cramer are soluţie unică (este compatibil determinat). Pentru determinarea soluţiei se procedează astfel:

1. Calculăm det A pe care îl notam cu d sau cu Δ (det A = d = Δ).

2. Calculăm determinanţii, $\Delta_{x_j} = d_{x_j}$, j = 1, 2, ..., n, obţinuţi astfel: în matricea A se înlocuieşte coloana j cu coloana termenilor liberi şi se calculează determinantul matricei obţinute.

3. Se exprimă necunoscutele cu formula: $x_j = \frac{d_{x_j}}{d}$, j = 1, 2, ..., n, (regula lui Cramer).

În general, sistemul de două ecuaţii de gradul întâi cu două necunoscute: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$, care are matricea coeficienţilor A = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ cu det A ≠ 0 este sistem Cramer şi se rezolvă astfel: det A = d = Δ = $a_{11}a_{22}$ - $a_{12}a_{21}$.

$$d_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2 \text{ şi } d_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - a_{21}b_1.$$

$$x_1 = \frac{d_{x_1}}{d} = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{d_{x_2}}{d} = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

În general, sistemul de trei ecuaţii de gradul întâi cu trei necunoscute:

$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$ care are A = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, cu det A ≠ 0, este sistem Cramer şi se rezolvă parcurgând aceleaşi etape: d = det A= Δ

$$d_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \; d_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \; d_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix};$$

$$x_1 = \frac{d_{x_1}}{d}; \; x_2 = \frac{d_{x_2}}{d}; \; x_3 = \frac{d_{x_3}}{d}$$

Rezolvaţi următoarele sisteme prin metoda lui Cramer:

1. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 = 10 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 2 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 = 5 \\ -9x_1 + 9x_2 - 20x_3 = -7 \end{cases}$
3. $\begin{cases} mx_1 + x_2 = m + 1 \\ x_1 - mx_2 = 1 - m \end{cases}, m \in R$
4. Determinaţi valorile parametrului real m, astfel încât următorul sistem să fie de tip Cramer: $\begin{cases} x + 4y = 10 \\ 4y - 7z = 13 \\ 4x + mz = 6 \end{cases}$
5. Determinaţi valorile parametrului real m, astfel încât următorul sistem să nu fie de tip Cramer: $\begin{cases} x + 3y - z = 15 \\ 2y + 2z = 8 \\ mx - 2y = 5 \end{cases}$
6. Determinaţi mulţimea valorilor parametrului real m pentru care sistemul următor are numai soluţii nule: $\begin{cases} (m-1)x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + 2y + (m+1)z = 0 \end{cases}$

Barem de corectare

Exerciţiul 1

1. Matricea coeficienţilor sistemului este A = $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ …………….…….. 3,75 p
2. Determinantul sistemului este $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ = -5 ………………….…… 3,75 p
3. Sistemul este compatibil determinat (Cramer) pentru că $\Delta \neq 0$ ……….. 3,50 p
4. $\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 10 & 2 \end{vmatrix}$ = -16 ……………………………………………….. 3,75 p
5. $\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 10 \end{vmatrix}$ = -1 ……………………………………….............. 3,75 p
6. Finalizare $x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{16}{5}$, $x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{1}{5}$ ………………………… 3,75 p

TOTAL ……………………………………………………………… **22,5 p**

Exerciţiul 2

1. Matricea coeficienţilor sistemului este A = $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 5 & 7 & -4 \\ -9 & 9 & -20 \end{pmatrix}$ ……… 3,75 p

2. Determinantul sistemului este $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 5 & 7 & -4 \\ -9 & 9 & -20 \end{vmatrix}$ = -288 ………….. 3,75 p

3. Sistemul este compatibil determinat (Cramer) pentru că $\Delta \neq 0$ ……….. 3,75 p

4. $\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & 7 & -4 \\ -7 & 9 & -20 \end{vmatrix}$ = -216 ………………………………………... 3,75 p

5. $\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 5 & -4 \\ -9 & -7 & -20 \end{vmatrix}$ = -72 ………………………………………… 3,75 p

6. $\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 5 & 7 & 5 \\ -9 & 9 & -7 \end{vmatrix}$ = -36 ……………………………………..... 3,75 p

7. Finalizare $x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{3}{4}$, $x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{1}{4}$, $x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = \frac{1}{8}$ ………………... 3,75 p

TOTAL ……………………………………………………………….. **26,25 p**

Exerciţiul 3

1. Matricea coeficienţilor sistemului este A = $\begin{pmatrix} m & 1 \\ 1 & -m \end{pmatrix}$ ……………….. 3,75 p

2. Determinantul sistemului este $\Delta = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & -m \end{vmatrix} = -(m^2+1)$,

   $\Delta \neq 0, \forall\, m \in R$……………………………………………………….. 3,75 p

3. $\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} m+1 & 1 \\ 1-m & -m \end{vmatrix} = -(m^2+1)$ …………………………………... 3,75 p

4. $\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} m & m+1 \\ 1 & 1-m \end{vmatrix} = -(m^2+1)$ ……………...……………………... 3,75 p

5. Finalizare $x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{-(m^2+1)}{-(m^2+1)} = 1$, $x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{-(m^2+1)}{-(m^2+1)} = 1$ ……... 3,75 p

TOTAL …...…………………………………………………………... **18,75 p**

Exerciţiul 4

1. Sistemul este de tip Cramer, dacă $\Delta \neq 0$ ……………………………….. 3,75 p

2. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -7 \\ 4 & 0 & m \end{vmatrix} \neq 0$,

   deci 4m – 112 ≠ 0, 4m ≠ 112, m ≠ 28, $m \in R \setminus \{28\}$………………….. 3,75 p

TOTAL ………………………………………………………………… **7,50 p**

Exercițiul 5

1. Sistemul nu este de tip Cramer, dacă $\Delta = 0$ .... 3,75 p

2. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ m & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0$, adică 8m + 4= 0, deci $m = -\frac{1}{2}$ .... 3,75 p

TOTAL .... **7,50 p**

Exercițiul 6

1. Sistemul are numai soluţii nule dacă $\Delta \neq 0$ .... 3,75 p

2. $\Delta = \begin{vmatrix} m-1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & m+1 \end{vmatrix} \neq 0$, adică:

   $-2m^2 - 3m + 8 \neq 0$, $m \neq \frac{-3 \pm \sqrt{73}}{4}$, deci $m \in R \setminus \left\{\frac{-3 \pm \sqrt{73}}{4}\right\}$ .... 3,75 p

TOTAL .... **7,50 p**

NUMĂRUL EXERCIŢIULUI	**PUNCTAJ**
1.	22,50 p
2.	26,25 p
3.	18,75 p
4.	7,50 p
5.	7,50 p
6.	7,50 p
TOTAL 90 p	

Se acordă 10 puncte din oficiu;

Timp de lucru 120 minute

Bibliografie:

Taraş Chirculescu, Maria; Gomolea, Aurelia; Săvulescu, Dumitru; 2002, Matematică-Manual pentru clasa a XI – a, M_2, Editura Teora, Bucureşti